Leçon n°190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Dans toute la suite on notera E et F deux ensembles.

I/Dénombrement.

A/ Les ensembles finis. [G] [G Analyse]

Définition 1 : Equipotence et cardinal.

Théorème 2 : Equipotents si et seulement si les ensembles ont mêmes cardinaux.

Proposition 3 : Si $F \subset E$ alors $|F| \leq |E|$ et cas d'égalité.

Corollaire 4 : Principe des tiroirs.

Application 5 : Tout irrationnel est proche d'un rationnel.

B/ Principe additif. [G]

Proposition 6 : Cardinal union disjointe.

Corollaire 7 : Lemme des bergers.

Corollaire 8 : Cardinal différence.

Théorème 9 : Crible de Poincaré pour 2 et n ensembles.

C/ Principe multiplicatif. [G]

Proposition 10 : Cardinal produit cartésien.

Corollaire 11 : Cardinal applications.

Corollaire 12 : Cardinal parties d'un ensemble.

Définition 13 : k-listes et k arrangements noté A_k^n.

Proposition 14 : Valeur de A_k^n.

Exemple 15 : Interprétation de cette valeur en terme de remise de boule.

Proposition 16 : Nombre d'injections.

Corollaire 17 : Cardinal $\mathfrak{S}(E)$.

D/ Combinaison. [G]

Définition 18 : Coefficient binomial.

Proposition 19 : Propriétés de ce coefficient (Pascal).

Exemple 20 : Nombres de surjections, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

Proposition 21 : Binôme de Newton, multinôme et formule de Vandermonde.

E/ Séries génératrices. [G]

Définition 22 : Série génératrice et série exponentielle.

Remarque 23 : Unicité série formelle permet d'obtenir des relations.

Exemple 24 : Nombre de dérangements, nombres de Bell.

II/ Formules d'inversion.

A/ Inversion de Pascal. [ROM]

Théorème 25 : Inversion de Pascal.

Corollaire 26 : Nombre de surjections.

B/ Inversion de Möbius. [ROM]

Définition 27 : Fonction de Möbius.

Développement 1

Lemme 28 : Calcul de $\sum_{d|n} \mu(d)$.

Théorème 29 : Inversion de Möbius.

Théorème 30 : $X^{p^n} - X = \prod_{d|n} \prod_{P \in U_n(p)} P$ et dénombrement des polynômes irréductibles de degré donné avec équivalent.

Application 31 : Probabilité que deux nombres soient premiers entre eux.

III/ Groupes et combinatoire.

A/ Actions de groupes. [PER] [CAL]

Théorème 32 : Lagrange.

Proposition 33 : Si morphisme lien entre les cardinaux de l'image et du noyau.

Définition 34 : Action de groupe. Et définition équivalente se donner un morphisme.

Définition 35 : Orbite et stabilisateur.

Proposition 36 : $|G| = |w(x)||\mathrm{Stab}(x)|$.

Théorème 37 : Équation aux classes.

Application 38 : Dénombrement des endomorphismes diagonalisables de $\mathbb{F}_q^n$.

Théorème 39 : Formule de Burnside.

Développement 2

Application 40 : Isométries du cube et colorations.

Application 41 : Problème de la roulette.

B/ Isomorphismes exceptionnels. [CAL]

Définition 42 : Définition groupes projectifs linéaires.

Proposition 43 : Dénombrement sur les corps finis : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, $\mathbb{P}^n(F_q)$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$, $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$ et $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$.

Lemme 44 : Si H est un sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ alors $H \simeq \mathfrak{S}_{n-1}$.

Théorème 45 : Isomorphismes exceptionnels.

Références :

— [G] Gourdon Algèbre 3ème éd. p. 299-312, p. 312, p. 314
— [G Analyse] Gourdon Analyse p. 275
— [ROM] Rombaldi Algèbre et géométrie 2nd éd. p. 51 et p. 331 et p. 423
— [CAL] Caldéro Histoires hédonistes tome 1 p. 250, p. 264 et p. 363
— [PER] Perrin Algèbre p. 13